

高レイノルズ数乱流場の統計的性質*
(第2報, 三次元エネルギースペクトルの測定)蒔田 秀治^{*1}, 飯田 明由^{*2}Statistical Properties of High-Reynolds Number Turbulent Flow Fields
(2nd Report, Measurement of Three-Dimensional Energy Spectra)

Hideharu MAKITA and Akiyoshi IIDA

Three-dimensional energy and dissipation spectra were experimentally obtained in a large-scale turbulence field. The characteristic scales of turbulent eddies, the energy-containing eddy, l_0 , the largest locally isotropic eddy, l_c , and the eddy of maximum dissipation, l_b , were determined in the spectral profile. The energy spectrum became self-similar for $k > 1/l_c$ but the l_0 scale was reduced in accordance with the streamwise decay of the turbulence energy. The l_b scale was proven to be more appropriate as the scale of the energy-dissipative eddy than the Taylor microscale, λ . The energy spectrum started to depart from Kolmogorov's $-5/3$ law at $\eta/l_0 \sim 0.15$ and was most accurately approximated by the theoretical profiles with an exponential tail in the far dissipation range.

Key Words: Turbulent Flow, Flow Measurement, Fluid Dynamics, Scales of Turbulence, Three-Dimensional Energy Spectrum, Local Similarity Hypothesis

1. 緒 言

Taylor⁽¹⁾, Kolmogorov⁽²⁾以来, 空間的, 時間的にランダムな乱流運動に対する統計的解析が行われ, そこでは, 乱流の記述には変動量に関するすべての多次元確率分布が必要であるとされている。しかし, 実験や数値計算により, 高次元の確率分布を求めることは一般に困難であり, 工学的には低次の平均量が必要な場合が多いことから, 測定可能な低次の確率分布関数と適当な仮定を用いて高次の確率分布関数を求め, 乱流場の構造を記述する手法が取られている。乱流場をさまざまなスケールを持った渦 (Eddy) の集合とするエネルギーカスケードモデルは, 定量的測定が速度変動場のフーリエ変換によるスペクトル解析により簡単に得られることや, エネルギーとスケールという直感的な表現によって乱流の性質を表すことができ, 乱流解析の最も基本的な概念の一つとなっている。乱流場のスペクトル解析には, 乱流が本質的に三次元的な流体運動であることから, 三次元エネルギースペクトル

が必要であるが, 実験的に測定可能なスペクトルは, 一次元エネルギースペクトルである。三次元エネルギースペクトルの直接測定は困難であり, 高次の確率分布関数を得ることの困難さとともに, 乱流研究の障害の一つとなっている。準等方的な格子乱流場に関しては, 一次元エネルギースペクトルから三次元エネルギースペクトルが求められている⁽³⁾⁻⁽⁵⁾。しかし, これらの結果は, 乱流の本質である高乱流レイノルズ数の条件⁽⁶⁾を満足させてはいない。一方, 高乱流レイノルズ数乱流場の実験の多くは非一様, 非等方的な大気乱流中⁽⁷⁾⁽⁸⁾のものであり, そこから, 三次元エネルギースペクトルを得ることは一般的には困難である。

著者らは, 乱流レイノルズ数が大きく, 一様かつ準等方的な乱流場の統計的性質について実験的に調べてきた⁽⁹⁾⁻⁽¹³⁾。本研究では, 前報の局所等方的な渦スケールの決定法に基づき, 高乱流レイノルズ数乱流場の局所等方領域における三次元エネルギースペクトルを求め, エネルギー散逸スペクトル, 遠散逸スペクトルおよびエネルギースペクトルと乱流場の代表的な渦スケールとの関係について報告する。

主 な 記 号

C: 散逸 ϵ に関する定数

* 平成元年10月15日 第67期全国大会講演会において講演, 原稿受付 平成元年3月29日。

^{*1} 正員, 豊橋技術科学大学(〒440 豊橋市天伯町字雲雀ヶ丘1-1)。

^{*2} 准員, 豊橋技術科学大学大学院 (現在 (株)日立製作所機械研究所)。

$E(k)$: 三次元エネルギースペクトル

$E_i(k)$: 一次元エネルギースペクトル

l_0 : エネルギーを含む渦のスケール

l_c : 局所等方的とみなせる渦スケール

l_D : 粘性散逸が最大となる渦スケール

表記以外の記号については、前報を参照のこと。

2. 実験装置および乱流場の性質

本研究の乱流場は、平均流速 $U_c = 3.0 \sim 7.0$ m/s において、乱流レイノルズ数 $Re_\lambda = 200 \sim 500$ の一様な準等方的な乱流場^{(9)~(13)}であり、速度変動の一次元エネルギースペクトル中に2けた以上の波数領域にわたる慣性小領域が存在し、Kolmogorovの局所等方性理論を適用することが可能な大規模乱流場である(表1)。

計測はXプローブ ($0.8 \times 0.8 \times 0.2$ mm³, 直径 3.1 μ m) および自作の低雑音 (SN 比約 72 dB) 熱線流速計を使用した。ワイヤの相対迎え角の調整、熱線出力の角度特性の検定を行い、データの補正を行った⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾。出力はデジタルレコーダに記録し、ミニコンピュータおよびシグナルアナライザにより統計処理を行った。

3. 乱流場の三次元スペクトル解析

3.1 局所平衡的な渦のスケールについて

Taylor⁽¹¹⁾は大きなレイノルズ数の乱流場のエネルギー散逸 ϵ は動粘性係数 ν には依存せず、乱流エネルギー q^2 とエネルギーを含む渦スケール l_0 にのみ依存すると仮定し、カスケードプロセスの最も基本的なパラメータである散逸 ϵ を簡単な次式によって表した。

$$\epsilon = C \cdot (q^2/2)^{3/2} / l_0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで C は Re_λ のみに依存する無次元定数である。

前報では定数 C の理論値 C_1 をエネルギースペクトル分布関数より導き、実験との比較から局所等方的な渦のスケール l_c 、エネルギーを含む渦のスケール l_0 と無次元定数 C の実験値との関係を以下のように表した。

$$l_0/l_c \sim 10.8 \cdot C^{3/2} \quad \dots\dots\dots (2)$$

表1から $U_c > 3$ m/s では $l_0/l_c \sim 4$ である。さらに、前報で示したように l_0 と η の関係は以下のように表せ

る。

$$l_0/\eta = 0.116 f \cdot Re_\lambda^{3/2} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで f は、前報⁽¹³⁾に示したように l_0/η の関数であり、

$$f = \{1 - 1.307 \alpha^{-1/2} (l_0/\eta)^{-2/3}\}^{-3/2} \quad \dots\dots\dots (4)$$

と表される。ここで、 α は Kolmogorov 定数である。 f は Re_λ に反比例し、 $Re_\lambda \rightarrow \infty$ のとき、1 に漸近する。局所等方的な渦が存在する下限の $Re_\lambda = 30$ においても約 1.40 であり、本乱流場の Re_λ の範囲では $f \sim 1$ とみなせる。ゆえに、局所等方とみなせる渦の最大スケール l_c は、

$$l_c = 0.0107 (Re_\lambda/C)^{3/2} \cdot \eta \quad \dots\dots\dots (5)$$

となる。本研究では、エネルギースペクトルと上記の関係を用いてスケール l_c の渦が局所等方的な渦であることを検証する。

図1に $U_c = 5$ m/s の場合の一次元エネルギースペクトル分布の下流方向変化を示す。実線は Heisenberg スペクトル⁽¹⁴⁾、破線および一点鎖線は、Kármán の普遍平衡スペクトルの計算法に Driscoll⁽¹⁵⁾ らが低波数領域のスペクトルを考慮して得た Extend Von Kálmán (EVK) モデル

$$\left. \begin{aligned} E(k\eta) &= \alpha \beta Q^{5/2} \gamma(k\eta) \theta(k\eta) \\ \gamma &= (Q^{3/2} k\eta)^{-5/3} + (Q^{3/2} k\eta)^{-1} \\ \theta &= \exp[-\alpha Q^{-2} \{1.5(Q^{3/2} k\eta)^{4/3} + (Q^{3/2} k\eta)^2\}] \\ \beta^{-1} &= 2 \int_0^\infty (k\eta)^2 \cdot (E(k\eta)/\beta) d(k\eta) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

により、求めた等方性乱流のスペクトルである。ただし、式(6)は三次元エネルギースペクトルに関する式であり、一次元スペクトルへの変換は、後述する三次元スペクトルと一次元スペクトルの関係式(11)を用いて行った。 β は本乱流場の Re_λ 範囲 (75~518) では約 1 である。また、 Q は速度変動の時間微分の確率密度分布のひずみ度に依存する定数で、Driscoll らに基づき、 $Q = 1.95$ とした⁽¹⁵⁾。

EVK モデルは定数 α, β, Q が実験によって決定できるため、他の数値計算において問題となる定数の任意性がない。また、Heisenberg や Pao⁽¹⁶⁾ のモデルと異なり、低波数領域のスペクトル分布を計算できる。さ

表1 乱流場の諸統計量 ($X/M=50$)

U_c (m/s)	Re_λ	C	l_0 (mm)	l_c (mm)	l (mm)	l_0/η	l_c/η	λ/η	l_0/η	l_0/l_c
1	88.3	0.805	132.5	18.9	15.3	160.1	20.5	18.49	6.70	7.80
3	254.7	0.492	149.2	40.0	9.7	496.8	132.2	31.41	6.70	3.73
5	379.5	0.459	164.3	48.9	8.2	773.5	230.2	38.28	6.70	3.36
7	460.3	0.497	188.4	49.8	6.7	1180.5	312.3	41.98	6.70	3.78

らに、高波数領域のスペクトル分布は最近の数値計算結果^{(17)~(20)}同様、指数形の関数であるなどの特徴を有し、乱流場の全波数領域にわたって、比較的高い精度でスペクトル分布の計算を行うことが可能であり、実験値との比較に適し、慣性小領域や局所等方領域の検証を行うことが可能である。等方性の仮定により、 $(\partial v^2/\partial X)=2(\partial u^2/\partial X)$ であるから、高波数領域では $E_1(k)<E_2(k)$ となるが、 $u'^2=v'^2$ であるから、低波数領域では $E_1(k)>E_2(k)$ となる。本乱流場の $E_1(k)$, $E_2(k)$ は計算結果とよく一致し、等方性乱流の理論を用いたスペクトルの近似が妥当であることを示している。ただし、低波数領域では $E_1(k)$ と $E_2(k)$ の差が等方性乱流の場合に比べ大きく、本乱流場の異方性が無視できないことがわかる。 $k>1/l_c$ において、エネルギー Spektral の測定値 $E_1(k)$, $E_2(k)$ が EVK モデルによる計算結果とよく一致することは、前報の l_c の推定法の妥当性を示している。

図1中にエネルギーを含む渦 l_0 、局所等方的な領域の大きさを表す渦スケール l_c 、エネルギー散逸 ε と乱流エネルギー u'^2 の関数として与えられるテイラーのマイクロスケール λ 、およびエネルギー Spektral が波数の $-5/3$ 乗の直線から外れ始める波数に相当し、粘性散逸領域を代表する渦スケール l_D を示す。三次元エネルギー Spektral が慣性小領域から外れ始める波数と散逸 Spektral が最大になる波数は、流速や測

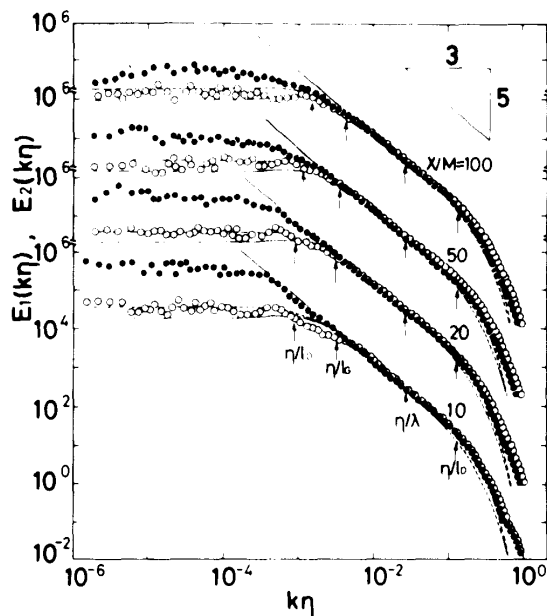


図1 一次元エネルギー Spektral の下流方向変化 ($U_c=5$ m/s)

実験結果	● : $E_1(k\eta)$, ○ : $E_2(k\eta)$
Heisenberg ⁽¹⁴⁾	— : $E_1(k\eta)$
EVK モデル ⁽¹⁵⁾	 : $E_1(k\eta)$, : $E_2(k\eta)$

定位置に無関係に、ほぼ $0.15/\eta$ となり、スケール $l_D \sim 6.7\eta$ は散逸に関する特徴的な渦スケールと考えられる。 l_D は(次報に示すように)エネルギー散逸の80%以上を保有する渦スケールである。 l_D は l_0 を一次元に拡張したスケールである。

l_0 , l_c , l_D はそれぞれ、波数空間においてエネルギーが最大となる領域、局所等方領域、慣性小領域中の最小渦スケールを表し、エネルギー Spektral 中の特徴的な尺度である。これに対し、テイラーのマイクロスケール λ (微分尺度) は Spektral における特徴的な尺度を示すものではなく⁽²¹⁾、エネルギーを含む渦 l_0 と Kolmogorov 最小渦スケール η の中間のスケールであるにすぎないことに注意する必要がある。ただし、 λ は実験的に容易に決定できるため、乱流場のスケールの比較を行うのに便利である。また、 λ により定義される乱流レイノルズ数 Re_λ とエネルギーを含む渦 l_0 、局所等方的な渦スケール l_c の間には式(3), (5)のような直接的な関係がある。前報より、

$$l_0/\lambda = 0.0625 \cdot f \cdot Re_\lambda \dots\dots\dots (7)$$

であり、式(2)を代入することにより次式を得る。

$$l_0/\lambda = 0.0058 \cdot C^{-3/2} \cdot f \cdot Re_\lambda \dots\dots\dots (8)$$

$l_c/\lambda > 1$ のとき、 λ は局所等方的である。 $f=1$ とすれば、乱流レイノルズ数が、

$$Re_\lambda > 172 \cdot C^{3/2} \dots\dots\dots (9)$$

を満たすとき λ は局所等方的である。前報で実験的に求めた C の平均値 $0.522^{(13)}$ を代入し、 λ の局所等方条件を求めると $Re_\lambda > 65$ となる。本乱流場の場合、最も Re_λ の小さい $U_c=1$ m/s, $X/M=120$ ($Re_\lambda \sim 75$) においても λ は局所等方的である。しかし、一般的な格子乱流場 ($Re_\lambda=30 \sim 100$ 程度) の場合、 $C=0.6 \sim 1.0$ であり⁽¹³⁾、 λ が局所等方的であるためには、 $Re_\lambda > 80 \sim 172$ が必要である。したがって、そこでは、 λ は局所等方的とみなせる最も大きな渦と、たかだか同程度の大きさのスケールである。このような理由から、工学的対象となる種々の乱流場において、実験または理論的な検証を示さずに、 λ を局所等方的とみなして解析を行うと、重大な過ちが生じる可能性もあり、危険である。さらに、実際の工学装置内部などの流れの計算を行う場合、 Re_λ がある程度大きくとも、強い異方性を伴う場合も多く、 λ が局所等方的であることはさらに保証され難い。 l_D (より一般的に議論するため、後述する三次元 Spektral に関するスケール $l_D \sim 6.7\eta$ を用いる) が局所等方的であれば、 $l_c > l_D$ であるから、式(5)より、

$$Re_\lambda > 73 \cdot C \dots\dots\dots (10)$$

を得る。 $C=0.6 \sim 1$ を代入すると、 l_D が局所等方であ

るために必要な Re_λ は格子乱流場の Re_λ (30~100) と同程度の 44~73 となり, 格子乱流場においても散逸の大部分は局所等方的な波数空間において行われることがわかる。式(3), (6)より, $Re_\lambda > 12$ において $\lambda/l_D > 1$ となり, 一般に格子乱流場でも $\lambda > l_D$ である。

本乱流場の λ, l_D は局所等方とみなせる渦スケール l_c より小さく, 局所等方性の概念に基づいて自己相似的と考えられる小, 中規模渦の代表的なスケールである。これらの渦スケールに対応する無次元波数は下流方向にほぼ一定 (図1: $\eta/\lambda \sim 1/39$, $\eta/l_D \sim 1/8$) である。ただし, η/λ は Re_λ に依存するため, すべての乱流場における普遍的な値ではなく, (各流速 U_c において) η/λ が下流方向にほぼ一定であることは, Re_λ が下流方向に大きく変化しないこと⁽¹²⁾を示しているにすぎない。一方, η/l_D は流速によらずほとんど一定である (l_D より小さなスケールの渦の統計的特性は分子粘性に強く依存し, 流速などによらず一定となる。しかし, その場合においても, 慣性項による非線形エネルギー伝達の影響を無視できないことを3・2節に示す)。

各流速において Re_λ が下流方向にほぼ一定であることから, 式(5)より, η/l_c もほぼ一定とみなせる。このことは, 渦 l_c が等方⁽¹³⁾かつ自己相似的であることを意味し, l_c より小さな渦が統計的に安定であり, $k > \eta/l_c$ ではスペクトル分布が下流方向に相似となることを示している。本実験結果も, この領域ではスペクトルは下流方向にほぼ相似である。一方, エネルギーを含む渦 l_0 に対する無次元波数とエネルギーレベルは下流方向に変化しており, l_0 と同程度か, より大きな渦は統計的に不安定であることがわかる。これらのことは, 他のすべての流速 ($U_c = 1 \sim 7$ m/s) についても成立し, l_c による局所等方的かつ自己相似的な渦スケールの推定法の妥当性を示している。

3・2 三次元エネルギースペクトル 等方性乱流では測定可能な一次元エネルギースペクトル E^1 と三次元エネルギースペクトル E には次の関係が成り立つ⁽²²⁾。

$$E(k, t) = -\frac{1}{2} k_i \frac{\partial}{\partial k_i} E^1(k_i, t) \dots \dots \dots (11)$$

ここで, $E^1(k_i, t) = E_1(k_i, t) + E_2(k_i, t) + E_3(k_i, t)$ 。従来, 格子乱流に関して得られた三次元エネルギースペクトル^{(3)~(5)}は, 式(11)によるものである。しかし, 格子乱流場も完全に等方とはいえず, 低波数領域に存在する弱い異方性のため, 式(11)を用いて三次元スペクトルを求めることは, 必ずしも妥当な方法ではないが, 異方性乱流場の三次元エネルギースペクトルをその一次元スペクトルから求めることは, 直接測定と同様,

極めて難しく, 等方性の仮定により三次元スペクトルを求め, 局所等方性が適用できる波数領域を示すのが現実的な方法である。スケールが l_c より小さな渦は自己相似的であり, より大きな渦の不平衡および異方性の影響をほとんど受けず, 統計的に独立な状態とみなせるため, 式(11)により三次元エネルギースペクトルを精度よく決定できると考えられる。

図2に, 三次元エネルギースペクトルを求めた結果を示す。 $k < 1/l_c$ の波数領域についても等方性の仮定を用いて三次元スペクトルを求めたが, その領域では異方性の影響を受けて, 正確さを欠くことに注意しなければならない。図2中に Heisenberg モデルおよび EVK モデルにより表1の Re_λ 数を持つ等方性乱流場の三次元エネルギースペクトルを求めた結果を合せて示す。一次元スペクトルと同様, 局所等方領域 ($k > 1/l_c$) では計算値とよく一致し, 広い波数領域にわたり慣性小領域が存在する。 $U_c = 1$ m/s ($Re_\lambda = 88$) のスペクトル分布は, Kida ら⁽¹⁷⁾が N-S 方程式の直接計算によって求めた分布 ($Re_\lambda = 100$) と局所等方領域においてよく一致し, 慣性小領域の広さもほぼ同じである。上記のことは, l_c より小さな渦に関して三次元エネルギースペクトルが十分な精度で得られたことを示している。一次元の場合と同様, λ, l_D は l_c より小さく, 局所等方的, かつ自己相似的である。先述したように, l_0 ($\sim 6.7\eta$) は l_D ($\sim 8\eta$) と一致しないことは注意が必要

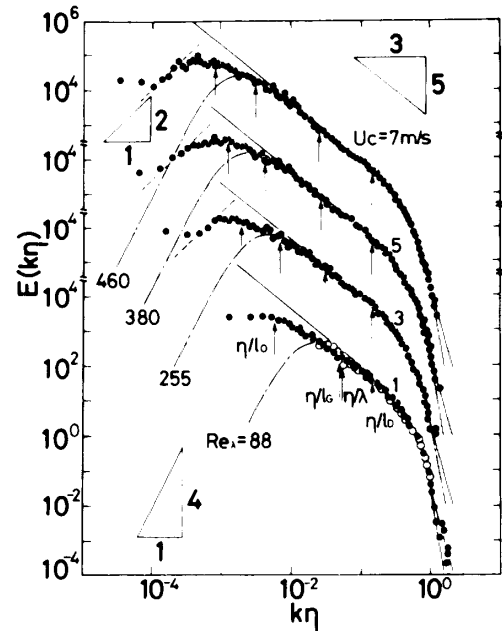


図2 三次元エネルギースペクトル (流速依存性)
(実験結果: ●, Heisenberg⁽¹⁴⁾: —, EVK モデル⁽¹⁵⁾: ----, ○, Kida-Murakami⁽¹⁷⁾)

表 2 遠散逸領域におけるエネルギースペクトル分布関数

Exponential tail		
Present experiment	$E(k\eta) = 7.6(k\eta)^{-1.1} \cdot \exp(-4.9k\eta)$	$0.5 < k\eta < 1.5$
Kida & Murakami ⁽¹⁷⁾	$E(k\eta) = 8.4(k\eta)^{-1.1} \cdot \exp(-4.9k\eta)$	$0.5 < k\eta < 1.8$
EVK model ⁽¹⁵⁾	$E(k\eta) = \alpha \beta \cdot Q^{3/2} \{(\gamma)^{-5/2} + (\gamma)^{-1}\} \exp[-\alpha Q^{-2} \{1.5(\gamma)^{4/3} + (\gamma)^2\}]$ $\gamma = Q^{3/2}(k\eta), \beta = 1, Q = 1.95$	
Pao ⁽¹⁶⁾	$E(k\eta) = \alpha [(k\eta)^{-5/3}] \exp[-1.5 \alpha (k\eta)^{4/3}]$	
Power series of k		
Heisenberg ⁽¹⁴⁾	$E(k\eta) = \alpha (k\eta)^{-5/3} [1 + B(k\eta^4)]^{-4/3}$	

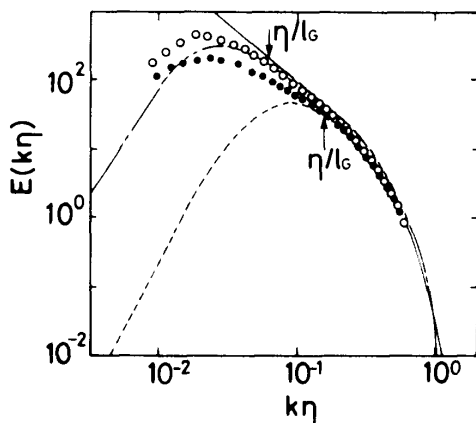


図 3 局所等方的な渦スケールと三次元エネルギースペクトル

(● : Van Atta-Chen⁽³⁾, EVK モデル⁽¹⁵⁾ :
 ○ : Uberoi⁽⁴⁾ EVK モデル⁽¹⁵⁾ :
 Heisenberg⁽¹⁴⁾ : —)

である。ただし、Monin ら⁽²¹⁾も述べているようにほぼ $l_{10} \sim l_0$ である。Kida ら⁽¹⁷⁾も本実験結果に等しい $l_0 \sim 6.7\eta$ を得ている。また、大気乱流場の一次元スペクトルから得られた l_{10} は約 8η であり⁽²¹⁾、本実験によって得られた l_{10}, l_0 の値が妥当なものであることがわかる。

式(9)より、 $U_c = 1$ m/s の Re_λ は、 λ が局所等方的であるための最低限の値に相当する。図2より、 $U_c = 1$ m/s の場合、 $\lambda \sim l_c$ であり、判別式(9)が妥当であることがわかる。また、各流速とも、 l_0 はエネルギースペクトルが最大となる波数に相当し、著者らが示した異方性乱流場のエネルギーを含む渦の推定法⁽¹³⁾ (縦、横方向の積分特性距離を長軸 (L_{UX}) と短軸 ($2 \times L_{VX}$) に持つ回転円体と同一の体積を持つ球の直径を l_0 とする)の正当性を示している。 $U_c \geq 3$ m/s の場合、 l_0 より大きなスケールの領域のスペクトル分布は波数の1~2乗に比例しているように思われる。EVK モデルでは、この領域ではエネルギーは波数の4乗に比例し、等方性乱流の理論では2~4乗に比例する⁽²²⁾。本乱流場は完全な等方性乱流場ではなく、この領域における

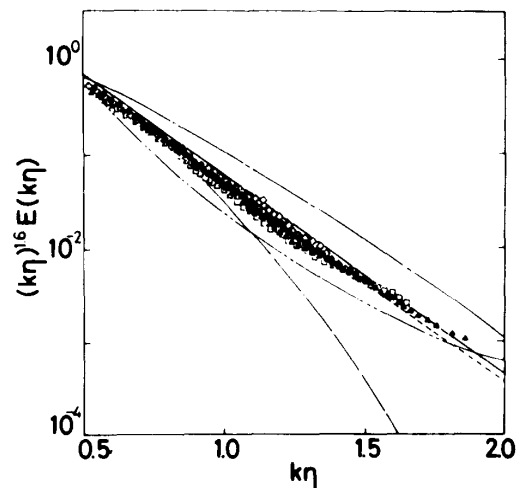


図 4 遠散逸領域における三次元エネルギースペクトル
 (実験結果 ▲ : $U_c = 1$ m/s, □ : 3 m/s, ● : 5 m/s, ◇ : 7 m/s, — : Kida-Murakami⁽¹⁷⁾, --- : EVK model⁽¹⁵⁾, : Pao⁽¹⁶⁾, - · - · : Heisenberg⁽¹⁴⁾)

三次元スペクトルは厳密なものではない。しかし、本乱流場は格子乱流場と同程度の準等方的な乱流場 ($u'/v' \sim 1.3$) であり、低波数領域においても等方性乱流場の理論から導かれるスペクトル分布に近い特性を持つスペクトルが得られた (特に $U_c = 5, 7$ m/s) ことは、本実験によって得られた三次元エネルギースペクトル分布は、低波数領域においても比較的信頼しうるものであると考えている。

Uberoi⁽³⁾, Van Atta ら⁽⁴⁾の結果に今までの議論を適用すると、彼らの実験データ (u', ε 及 Re_λ など) と第1報に示した渦スケールと Re_λ の関係から、それぞれ、 $C = 0.57, 0.48$, $Re_\lambda = 75, 35$ となるから、局所等方的な渦スケール l_c は、それぞれ $16.1\eta, 6.5\eta$ 以下と推定される。これらの値は彼ら自身が Heisenberg スペクトルとの比較により求めた推定値 ($l_c \sim 15\eta, 4\eta$) とほぼ一致する。図3に示すように Uberoi, Van Atta らのスペクトルと EVK モデルの計算結果は局所等方領域では比較的よく一致する。これらのことよ

り、一様性乱流場において、式(5)を用いて局所等方領域を推定することにより、等方性を仮定し、三次元エネルギースペクトルを求めることが可能な波数の下限を決定することができることがわかる。

$\eta/l_0 \sim 0.15$ より十分大きな波数領域、例えば、 $k\eta > 0.5$ では、ほとんど粘性のみが支配的であり、遠散逸領域⁽¹⁷⁾と呼ばれる。そこでの代表的なスペクトル分布関数を表2に示す。遠散逸領域は自己相似領域内にあり、渦構造は粘性に強く依存し、スペクトル分布は普遍的になると考えられている。しかし、三次元スペクトルの実験値と EVK モデル、Heisenberg スペクトルはこの領域ではよい一致を示さない。EVK モデル、Heisenberg スペクトル自体が遠散逸領域のスペクトルを表すのに、適切なものではないという指摘もあり、Kraichnan⁽¹⁸⁾、Tatsumi-Kida⁽¹⁹⁾、Kida-Murakami⁽¹⁷⁾ や Sreenivasan⁽²⁰⁾ などが数値計算により求めた指数形のスペクトル分布関数

$$E(k\eta) = A \cdot (k\eta)^B \exp(Dk\eta) \cdots \cdots \cdots (12)$$

と一致しない。ここで、 A, B, D は無次元定数である。

図4に本実験による結果 ($X/M = 40 \sim 100$ の平均値) および Heisenberg スペクトル (べき乗形)、EVK、Pao⁽¹⁶⁾ のモデル、Kida らの結果 [式(12)、 $A=8.4, B=-1.6, D=-4.9$] を示す (指数形)。Pao や Heisenberg スペクトルでは $k\eta > 0.5$ 、EVK モデルでは $k\eta > 0.8$ において実験値と一致しなくなり、これらのモデルによって得られたスペクトル分布が必ずしも正確ではないことがわかる。一方、Kida-Murakami の結果とは係数 A のわずかな不一致 (本実験では $A=7.6$) を除きよい一致を示している。Kida らのモデルは $0.5 < k\eta < 1.8$ において成立するが、本実験の場合、 $k\eta > 1.5$ において計測値にノイズの影響が見られるようになるため、適用範囲を $0.5 < k\eta < 1.5$ として、各係数を求めた。Kida らの計算は、境界条件と場の対称性に関する条件以外は物理的な仮定を用いずに N-S 方程式を直接解いたものであり、遠散逸領域のスペクトル分布関数としての信頼性は高いと思われる。場の対称性の条件を用いているため一般性に欠けるという指摘⁽²³⁾もあるが、この領域では局所等方性が満足されるため、問題はないと思われる。精度の高い測定が困難であった波数の大きな領域におけるスペクトル分布の実験結果が信頼性の高い数値計算と一致することから、本研究によって広い波数領域 (実験的にはほぼ全波数領域) にわたって十分に高い精度を持った三次元エネルギースペクトルが、実験的に得られたことがわかる。

これまで著者らも含め、高波数領域における測定結果と EVK モデル、Pao や Heisenberg のモデルとの

不一致はプローブの空間分解能の不足による誤差 (もちろん、それも問題である) として取扱う場合が多かったが、図4に示すように、比較に用いた Heisenberg、Pao や EVK モデルが式(12)と一致しないことから、測定結果との差は、これらのモデルそのものが遠散逸領域におけるスペクトルを表すのに適切なモデルではないことによるために生じた可能性があり、本実験結果による支持を得たことにより、式(12)に代表される指数形の分布関数を遠散逸領域におけるスペクトル分布を表すものとするほうがよいと思われる。本実験による遠散逸領域のスペクトル分布は、

$$E(k\eta) = 7.6 \cdot (k\eta)^{-1.6} \exp(-4.9k\eta) \cdots \cdots \cdots (13)$$

と表せる。一方、N-S 方程式に特性はん関数を導入した Hopf 方程式によれば⁽²⁴⁾、エネルギースペクトルの時間変化は粘性項 (線形項) と 2 階はん関数微分項 (非線形項) の和として表される。乱れが非常に小さい極限では、N-S 方程式の非線形項を無視できるので、Hopf 方程式の特解である次式を得ることが可能となる⁽²⁴⁾。

$$E(k) = F(k) \cdot \exp(-2\nu k^2 t) \cdots \cdots \cdots (14)$$

ここで、 $F(k)$ は初期条件によって定まる任意の等方的なエネルギーの分布関数である。式(13)、(14)の比較から、異⁽²⁴⁾が議論したように、乱れが弱く粘性の影響が大きい場合の粘性減衰スペクトルと強い乱流場の遠散逸領域のスペクトル分布は一致しないことがわかる。このことは、渦スケールが l_0 より十分小さい遠散逸領域においても、粘性によるエネルギーの減衰は、N-S 方程式に非線形項 (エネルギー伝達項) の影響を無視して表すことはできないことを示している。したがって、高波数領域におけるスペクトル分布を考える場合においても、従来の多くの研究において無意識的になされてきたように粘性のみを主要なパラメータとするのではなく、非線形項の影響を考慮すべきであることがわかる。EVK モデルや Pao のモデルは、式(14)を基礎としているため、遠散逸領域において実験結果と一致しなくなったと考えられる。

3.3 エネルギー散逸スペクトル 等方性乱流場における散逸 ε と、そのスペクトル $S(k)$ はエネルギースペクトル $E(k)$ を用いて、以下のように表される⁽²²⁾。

$$S(k) = 2\nu k^2 \cdot E(k) \cdots \cdots \cdots (15)$$

$$\varepsilon = \int_0^\infty S(k) dk \cdots \cdots \cdots (16)$$

ただし、 $S(k\eta) = S(k) / (\varepsilon^3/\nu)^{1/4}$ である。また式(15)より、慣性小領域 ($E \sim k^{-5/3}$) では、

$$S(k\eta) = 2\alpha(k\eta)^{1/3} \cdots \cdots \cdots (17)$$

となり、散逸スペクトルは波数の $1/3$ 乗に比例する。

図5に本乱流場における散逸スペクトルを示す。図1と同様に図5中に l_0 , l_c , l_b に相当する波数を示す。エネルギースペクトルと異なり、 l_c より大きな渦では散逸スペクトル成分は極めて小さく、エネルギー散逸はほとんど起こらない。したがって、散逸は自己相似的な波数空間内で起きるため、散逸スペクトル分布は下流方向にほぼ不変であり、図5には $X/M=50$ のみを示した。三次元エネルギースペクトルが慣性小領域からはずれる $\eta/l_0 \sim 0.15$ で散逸スペクトルは最大となり、粘性の効果がエネルギー密度のレベルに対して相対的に最大となることが明確に示されている。遠散逸領域では、式(13), (15)より、

$$S(k\eta) = 15.2 \cdot (k\eta)^{0.4} \exp(-4.9k\eta) \quad \cdots \cdots (18)$$

また、 $\eta/l_0 \sim 0.15$ 付近では、散逸スペクトルは波数 k に比例し、実験的に

$$S(k\eta) = 16.7(k\eta) \quad \cdots \cdots (19)$$

と表せる。式(17)~(19)を図5中に太線で示す。式(17)は慣性小領域より小さな波数領域の散逸スペクトルを表すことはできないが、前述したようにエネルギースペクトルは波数の小さな領域では波数の $1 \sim 4$ 乗に比例することから、散逸スペクトルは波数の小さな領域では、波数の $3 \sim 6$ 乗に比例し、 $k^{1/3}$ よりも速く零に漸近するため無視できる程度の値しか持たない。したがって、 Re_λ が大きければ、散逸スペクトルは式(17)~(19)によって近似できることになる。測定された散逸スペクトルは Re_λ の増加とともに、式(17), (18)に漸近する傾向を示す。

Tatsumi ら⁽²⁵⁾ や Frisch ら⁽²⁶⁾ によれば quasi-

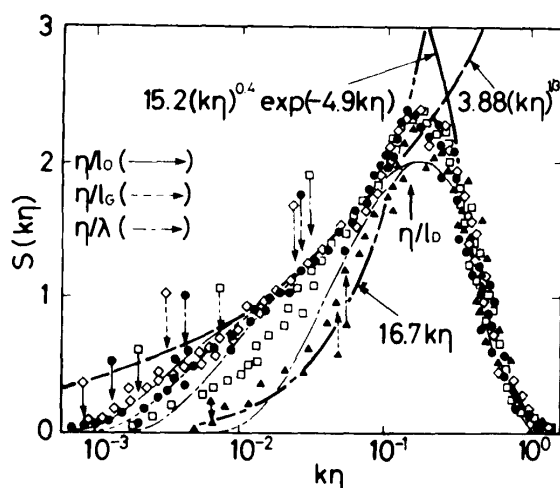


図5 エネルギー散逸スペクトル (流速依存性)

(実験結果 $\blacktriangle$: $U_c=1$ m/s, $\square$: 3 m/s, $\bullet$: 5 m/s, $\diamond$: 7 m/s, EVK⁽¹⁵⁾ $---$: $U_c=1$ m/s, $----$: 3 m/s, $----$: 5 m/s, $----$: 7 m/s)

normal Markovian 近似によって、粘性の影響がそれほど顕著ではないが、慣性小領域のように零ではない波数領域におけるスペクトル分布は波数の -1 乗に比例する。本実験結果における $k\eta \sim 0.15$ 付近のスペクトル分布は波数の -1 乗に比例するように見える。次報で示すようにエネルギー散逸に対する寄与は、式(19)が成立するようになる波数以上の領域において目立つようになることから、 $k\eta \sim 0.15$ 付近の波数領域は粘性の影響はほとんどないが、零ではない波数領域とみなせる。したがって、quasi-normal Markovian 近似による計算が正しければ、乱流場のエネルギースペクトルが、ブラウン運動のスペクトルのように波数に逆比例する領域が存在する可能性がある。ただし、そのような波数領域はごく狭く、温度変動のスペクトルに見られる⁽²⁷⁾ような明確なものではない。温度変動スペクトルの場合、粘性の影響が現れはじめるが、分子熱拡散の効果が現れない領域が存在するため、スペクトルが波数の -1 乗に比例する領域が存在することが(プラントル数が大きい場合)理論的⁽²⁸⁾に示されており、この領域を粘性-対流小領域と呼んでいる。速度変動スペクトル中に波数の -1 乗に比例する領域が存在する可能性については、理論的にはいまだ明らかではないが、Kida らの数値計算においても本実験と同じように $k \sim \eta/l_0$ 付近にこぶ状の突起が存在し、エネルギースペクトルは波数の $-5/3$ 乗より緩やかになった後、指数関数的に減衰することから、そのような領域が存在する可能性はある。ただし、波数の -1 乗に比例するスペクトルが(測定誤差によるものでなく)存在するならば、慣性小領域の最小渦 l_0 の大きさは先に示した 6.7η より大きな(実験的に)約 10η 程度の大きさとなる。この点に関しては、さらに多くのデータを集積し、より詳しく検討する必要がある。今後の課題の一つである。また、 $U_c=3$ m/s 以上の場合に比べ、 Re_λ が小さく、慣性項が小さい(相対的に粘性項の大きな) $U_c=1$ m/s の散逸スペクトルが式(19)に漸近することも興味深い結果である。

乱流レイノルズ数の大きな乱流場では、慣性小領域以上の波数領域のスペクトル分布は普遍的である。本乱流場の場合、十分に広い波数領域にわたり自己相似領域が存在すると考えられることから、散逸スペクトルは自己相似的であり、最も慣性小領域の狭い、 1 m/s の l_c より小さなスケールの渦の散逸スペクトルは流速にかかわらず一致するはずである。しかし、散逸スペクトルの測定結果は $U_c=3$ m/s の l_c より小さな渦スケールの散逸スペクトルについてはほぼ普遍的とみなせたが、 $U_c=1$ m/s の場合、散逸スペクトルが

流速に依存しなくなる波数は $k\eta \sim 0.15$ であった。したがって、 $U_c = 1 \text{ m/s}$ における自己相似的な波数空間は $k\eta > 0.15$ であり、 $Re_\lambda \sim 90$ 程度では、厳密には慣性小領域が存在しないことを示している。

図5から、散逸スペクトルが $k^{1/3}$ に比例する領域はエネルギースペクトルで観察される慣性小領域よりやや狭い。例えば、 $Re_\lambda \sim 460$ では慣性小領域は1けた程度の波数領域 ($0.009 \sim k\eta \sim 0.1$) しかなく、エネルギースペクトルから求めた場合 ($0.003 \sim k\eta \sim 0.15$) に比べ狭くなる。Stewart ら⁽²⁹⁾は“Absolute-equilibrium”の成立する条件を以下のように示した。

$$(k\eta)^2 \cdot Re_\lambda \gg 4.52 \quad \dots\dots\dots (20)$$

式(20)を満たす波数 k は統計的に安定であるとみなされる。仮に左辺が右辺より1けた以上大きい場合を十分大きいとみなせば、 $Re_\lambda \sim 460$ の場合、統計的に安定な波数は $0.31/\eta$ 程度である。これは慣性小領域における最大波数 $0.15/\eta$ より大きく、本乱流場のレイノルズ数範囲では慣性小領域が存在しないことになる。しかし、Stewart らが式(20)にいくつかの制限を加えて示した慣性小領域の存在条件 $Re_\lambda > 1730$ は前報でも述べたように、著者らの実験を含め、高レイノルズ数乱流場のエネルギースペクトルの測定によって得られた慣性小領域が存在するために必要な乱流レイノルズ数と一致しない。前述したように Kida らは $Re_\lambda \sim 100$ で1けた程度の波数領域にわたる慣性小領域を示し、Kistler-Vrebalovich⁽³⁰⁾の実験 ($Re_\lambda \sim 669$) では2けた程度の波数領域にわたり慣性小領域が存在する。著者らの求めた慣性小領域の存在条件 ($Re_\lambda \sim 200$)⁽¹²⁾は、Bradshaw⁽³¹⁾, Corrsin⁽³²⁾の求めた慣性小領域の存在条件、 $Re_\lambda = 200 \sim 300$ とほぼ一致している。また、 $U_c \geq 3 \text{ m/s}$ ($Re_\lambda \geq 200$) では、測定された散逸スペクトル中に慣性小領域が観察されることから、著者らの示した Re_λ の数値はほぼ妥当なものであり、式(20)の条件は厳しすぎると考えている。また、式(20)の左辺が右辺より“十分大きい”ことの判別は主観的にならざるをえない欠点を持っている。

散逸スペクトルとエネルギースペクトルの測定結果に基づく慣性小領域の広さの違いは、散逸スペクトルのほうが高次の統計量であり、エネルギースペクトルに比べ測定が困難であること、散逸スペクトルを規格化して普遍的な構造を調べる場合、その精度は散逸 ε の測定精度に強く依存することが一因としてあげられる。 ε は乱流の発生条件や波数に依存する物理量であり⁽²⁴⁾、空間的間欠性⁽²¹⁾⁽³³⁾をも考慮して、厳密に ε を求めることは困難である。 ε の測定誤差が速度変動の n 階微分のスペクトル $k^n E(k)$ の測定に及ぼす影響は

$\varepsilon^{-(1+n)/4}$ に比例して大きくなり⁽²¹⁾、速度変動の2階微分のスペクトルである散逸スペクトルのほうがエネルギースペクトル(零階微分)に比べ、 ε の近似による誤差の影響が大きくなることが知られている。このような理由から、本論文では慣性小領域の範囲を定義するのに、エネルギースペクトルから得られた値を主に用いた。さらに厳密な議論を展開するにはエネルギー伝達関数を求める必要があり、その結果については別報で述べる予定である。

4. 結 論

(1) 大規模乱流場の測定結果を用いて Kolmogorov の局所等方性理論では決定できなかった局所等方的な領域の大きさや平衡領域の存在条件などを明らかにした。

(2) 局所等方的とみなせる最大渦のスケールを決定する準理論的な手法を示し、実験的に検証した。

(3) 本乱流場の Re_λ の領域ではエネルギースペクトル中には慣性小領域が存在し、局所等方的な渦は、ほぼ自己相似的とみなせる領域内に存在する。

(4) 慣性小領域が明確に存在する乱流場の三次元エネルギースペクトル、散逸スペクトルを実験的に得た。

(5) 遠散逸領域のエネルギースペクトル分布は N-S 方程式の直接数値シミュレーションによる結果とほぼ一致し、その分布は指数形の関数で近似できる。

(6) 遠散逸領域における解析にも動粘性のみでなく、非線形慣性項の影響を考慮すべきである。

(7) エネルギースペクトルが慣性小領域からはずれ始める波数で散逸スペクトルは最大となり、粘性が効果的に作用するようになる。この波数は乱流レイノルズ数に無関係に約 $0.15/\eta$ である。

(8) 散逸が最大となるスケール l_b は近似的に 6.7η とみなせる。

(9) テイラーのマイクロスケールは通常の格子乱流場などでは必ずしも等方的ではなく、 λ に対して無条件に局所等方性理論を適用することはできない。

本研究の一部は昭和63年度文部省科学研究費 C (63550133) の援助により行われた。ここに、謝意を表す。

文 献

- (1) Taylor, G. I., *Proc. R. Soc., London, Ser. A*, **151** (1935), 288.
- (2) Kolmogorov, A. N., *C. R. Acad. Sci. USSR*, **30** (1941), 301.

- (3) Van Atta, C. W. and Chen, W. Y., *J. Fluid Mech.*, **44** (1970), 145.
- (4) Uberoi, M. S., *Phys. Fluids*, **6** (1963), 1048.
- (5) Comte-Bellot, G. and Corrsin, S., *J. Fluid Mech.*, **48** (1971), 273.
- (6) Batchelor, G. K., *The Theory of Homogeneous Turbulence*, (1953), 103, Cambridge Univ. Press.
- (7) Boston, N. E. J. and Burling, R. W., *J. Fluid Mech.*, **55** (1972), 473.
- (8) Williams, R. M. and Paulson, C. A., *J. Fluid Mech.*, **83** (1977), 547.
- (9) 蒔田・ほか3名, 機論, 53-495, B (1987), 3173.
- (10) 蒔田・ほか3名, 機論, 53-495, B (1987), 3180.
- (11) 蒔田・ほか3名, 機論, 54-497, B (1988), 37.
- (12) 蒔田・ほか2名, 機論, 54-505, B (1988), 2333.
- (13) 蒔田・飯田, 機論, 55-515, B (1989), 1847.
- (14) Heisenberg, W., *Z. Physik*, **124** (1948), 628.
- (15) Driscoll, R. J. and Kennedy, L. A., *Phys. Fluids*, **26**-5 (1983), 1228.
- (16) Pao, Y. H., *Phys. Fluids*, **8** (1965), 1063.
- (17) Kida, S. and Murakami, Y., *Phys. Fluids*, **30**-7 (1987), 203.
- (18) Kraichnan, R. H., *J. Fluid Mech.*, **5** (1959), 497.
- (19) Tatsumi, T. and Kida, S., *J. Phys. Soc. Jpn.*, **49** (1980), 2014.
- (20) Sreenivasan, K. R., *J. Fluid Mech.*, **151** (1985), 81.
- (21) Monin, A. C. and Yaglom, A. M., *Statistical Fluid Mechanics*, **2** (1975), 204, MIT Press.
- (22) Hinze, J. O., *Turbulence*, 2nd ed., (1975), 254, McGraw-Hill.
- (23) 山本・細川, 第19回流体力学懇談会講演集, (1987), 165, 148.
- (24) 巽編, 乱流現象の科学, (1986), 165, 東京大学出版.
- (25) Tatsumi, T., Kida, S. and Mizushima, J., *J. Fluid Mech.*, **85** (1978), 97.
- (26) Frisch, U., Lesieur, M. and Schertzer, D., *J. Fluid Mech.*, **97** (1980), 181.
- (27) Gibson, C. H. and Schwarz, W. H., *J. Fluid Mech.*, **16** (1963), 365.
- (28) Batchlor, G. K., *J. Fluid Mech.*, **5** (1959), 113.
- (29) Stewart, R. W. and Townsend, A. A., *Phil. Trans. Soc., A*, **243** (1951), 359.
- (30) Kistler, A. L. and Vrebalovich, T., *J. Fluid Mech.*, **26** (1966), 37.
- (31) Bradshaw, P., *N. P. L. Aero. Rep.*, 1220 (1967).
- (32) Corrsin, S., *NACA RM*, 58B11 (1958).
- (33) Yamamoto, K. and Hosokawa, H., *J. Phys. Soc. Jpn.*, **57**-5 (1988), 1532.